Дәріс 10. Сызықты жүйелерді тиімді басқару

Басқару объектісінің моделін сипаттайтын жүйе келесі түрде берілсін:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad (1)$$

Мұндағы A(t), B(t) элементтері үзіліссіз, (nxn), (nxq) өлшемді матрицалар басқаруға шектеу жоқ, яғни $u \in U = R^2, t \in T = [t_0, t_1] -$ жүйенің қызмет ету аралығы, t_1- процесстің басталу уақыты, t_1- аяқталу уақыты, траекторияның оң жағы $x(t_1)$ бос (бекітілмеген).

Бастапқы шарт $x(t_0) = x_0 \in R^n$ берілген және жүйенің бастапқы күйін сипаттайды.

Басқарудың сапа функционалы квадратты болсын:

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}[x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)]dt + \frac{1}{2}[x^t(t_1)\Lambda x(t_1)], \qquad (2)$$

мұндағы S(t), Λ- теріс емес анықталған симметриялық матрицалар (nxn), Q(t) – оң анықталған (qxq) өлшемді симметриялық матрица.

(2) функционал минимум мәнге ие болатындай $d^*(x^*(t), u^*(t))$жұбын анықтау қажет

$$f(t,x,u) = A(t)x + B(t)u$$

$$f^0(t,x,u) = \frac{1}{2}[x^TS(t)x + u^TQ(t)u] \quad , \quad F(x) = \frac{1}{2}[x^T\Lambda x]$$

1. $\frac{\partial(Ax)}{\partial x} = A^T$;
2. $\frac{\partial(x^TAx)}{\partial x} = Ax + A^Tx$
3. $(AB)^T = B^TA^T$

екенін ескеріп, жалпы әдісті пайдаланамыз

1. $H(t,\psi,x,u) = \psi^T[A(t)x + B(t)u] - \frac{1}{2}[x^TS(t)x + u^TQ(t)u]$
2. $\frac{\partial H(t,\psi(t),x(t),u)}{\partial u} = B^T(t)\psi(t) - Q(t)u = 0$
   $u^*(t) = Q^{-1}(t)B^T(t)\psi(t) \qquad (3)$
   $\frac{\partial^2 H(t,\psi(t),x(t),u)}{\partial u^2} = -Q(t) < 0$
3. $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)Q^{-1}(t)B^{(T)}(t)\psi(t)$, $x(t_0) = x_0$
   $\dot{\psi}(t) = -A(t)\psi(t) + S(t)x(t)$
4. t_1 берілген, $\delta t_1 = 0$. $x(t_1)$ - бекітілген, $\delta x - \forall$
   $F(x) = \frac{1}{2}[x^T\Lambda x]$: $\delta F = [\frac{\partial F}{\partial x}]^T\delta x = x^T\Lambda\delta x$
   $[x^T(t_1)\Lambda + \psi^T(t_1)]\delta x = 0$
   $\psi(t_1) = \Lambda x(t_1)$
5. $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)Q^{-1}(t)B^T(t)\psi(t)$, $x(t_0) = x_0$
   $\dot{\psi}(t) = -A(t)\psi(t) + S(t)x(t)$, $\psi(t_{1)} = -\Lambda x(t_1) \qquad (3)$
   $u^*(t) = Q^{-1}(t)B^T(t)\psi(t)$

Сапа критерийі квадраттық түрде берілген сызықты жүйенің тиімді басқаруын анықтау мәселесі сызықты Д.Т. жүйесінің шекаралық есебін шешу мәселесіне келеді.

Мысал.

$$(x(t)=-x(t)+u(t))^{\cdot}\ ,\ \ x(0)=x_0$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt+\frac{1}{2}x^2(1) \qquad \rightarrow \qquad \min$$

Функциянал минимум болатындай $x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ тиімді жұбын анықтау қажет.

$$A(t)=-1\ ;\ \ B(t)=1\ ;\ \ S(t)=0\ ;\ \ \Lambda=1\ , \qquad t_0=0\ ;\ \ t_1=1$$

$$\dot{x}(t)=x(t)+\psi(t)\ , \quad x(0)=x_0$$

$$\dot{\psi}(t)=\psi(t)\ , \quad \psi(1)=-x(1)$$

$$u^*(t)=\psi(t)$$

$\psi(t)=c_1e^t,\ \ \psi(1)=C_1e=-x(1)$,

$x(t)=C_2e^{-t}+\frac{1}{2}C_1e^t \qquad x(0)=C_2+\frac{1}{2}C_1=x_0$

$$x(1)=C_2e^{-1}+\frac{1}{2}C_1e$$

$C_1=\frac{2x_0}{1-3e^2}$; $\qquad C_2=\frac{3x_0e^2}{1-3e^2}$

$$x^*(t)=\frac{x_0(e^t-3e^{2-t})}{1-3e^2} \quad ; \quad u^*(t)=\frac{2x_0e^t}{1-3e^2}$$